$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\sqrt{\cos x}} = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = -\infty$

f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

2) – a) f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \leq 0 \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

* f est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

elle réalise donc une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [f(\frac{\pi}{2}), f(0)] = [0, 1]$

par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, 1]$

b) f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ d'où :

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse $f(\frac{\pi}{2})=0$

Par suite f^{-1} est dérivable à droite en 0 et $(f^{-1})'(0) = 0$

c) $f'_d(0) = 0$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0 d'où :

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $f(0) = 1$

D'où : f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 1

3) f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \neq 0$

D'où : f^{-1} est dérivable sur $]0, 1[$

* soit $y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x \iff \sqrt{\cos y} = x \iff \cos y = x^2$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \iff \sin^2 y = 1 - \cos^2 y \iff \sin y = \sqrt{1-x^4}$ car $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$

D'où : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-2\sqrt{\cos y}}{\sin y} = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

EXERCICE№15

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $\forall x \in [0, 1]$

1) f est dérivable sur $[0, 1]$ et $f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 0$ car pour $0 \leq x \leq 1$; on a :

$0 \leq \frac{\pi}{2}x \leq \frac{\pi}{2}$

x	0		1
$f'(x)$	0	-	
$f(x)$	1	↘	0

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn